

# Géodésie : l'astronomie... terre à terre !

**Plusieurs coïncidences** – ces derniers mois – m'ont amené à m'intéresser à la **géodésie** (la mesure de la terre), un sujet que je n'aurais pourtant pas mis dans la liste de mes priorités.

- il y a quelque temps, j'avais déjà publié sur le site d'AstroSaône un article sur le [décalage entre le méridien de Greenwich et le méridien 0 du système GPS](#) ; un nouveau passage à Greenwich en juin 2018 m'a permis de revérifier cet écart !
  - puis en août 2018, j'ai eu l'occasion – lors d'un voyage dans les Pays Baltes – de passer à l'Observatoire de Tartu (anciennement Dorpat) en Estonie. J'ignorais l'existence de cet observatoire et je ne savais pas non plus que l'astronome F.G.W Struve (un des 5 Struve ou Struwe) s'y était illustré.
    - dans la cour de l'observatoire, j'ai pris en photo une stèle commémorative **de l'Arc géodésique de Struve**, dont j'ignorais l'existence, et qui a initié la recherche de compréhension qui fait l'objet de cet article.



- de retour en France, j'ai pu lire dans les numéros de la revue l'Astronomie d'octobre et novembre 2018, des articles sur la 'méridienne de Saint Sulpice'.
- puis fin novembre 2018, alors que je préparais pour mon groupe d'expression allemande, un parallèle entre les systèmes de cartes routières en France et en Allemagne, je suis tombé sur un documentaire vidéo d'Arte ([extrait sous ce lien](#)) résumant humoristiquement l'histoire de la cartographie en France.
- enfin, Philippe - un adhérent d'AstroSaône – a présenté en décembre 2018 un bel exposé sur une expérience pédagogique qu'il a initiée entre deux collèges (un à Paris, l'autre à Marseille) au sujet... de l'expérience d'Eratosthène.

Je n'avais donc pas le choix : il fallait que je m'intéresse à la géodésie !!

---

Je sais à vrai dire depuis fort longtemps (je pouvais avoir 8 ou 9 ans) ce qu'est un point géodésique !

A cette époque en effet, l'IGN avait envoyé pour un an ou deux dans mon petit village natal de l'Allier, deux ingénieurs afin de superviser une campagne de mesures dans la région. L'arrivée de deux familles 'de la ville' n'était pas passée inaperçue aux yeux des 'rats des champs', et surtout celle de deux ou trois petites filles de mon âge - qui ne me laissaient pas indifférent... De petites princesses géodésiques... auxquelles l'adjectif me semblait aller à merveille !

L'arc de Struve est beaucoup moins romantique... voilà déjà à quoi il ressemble ! Il embrasse 25° de méridien terrestre, soit une distance de près de 3000 km – depuis la Laponie jusqu'à la Mer Noire et traverse aujourd'hui 10 pays différents !

L'examen du tracé révèle instantanément :

- que Struve a eu recours à la triangulation – méthode trigonométrique bien connue
- que la suite des très nombreux triangles (258) s'écarte sensiblement du méridien de Tartu – qu'il s'agissait de mesurer... et je me suis demandé pourquoi

Pour répondre à cette dernière question, j'ai donc entrepris une bibliographie sur l'Arc de Struve. Je me suis vite aperçu qu'il n'était pas possible – pour comprendre en particulier cette stratégie de projection des triangles sur un méridien - de ne pas remonter à des expériences plus anciennes de mesure des arcs de méridien terrestre !

Je vous invite donc à un 'petit' flashback... avant de revenir à nos moutons estoniens !

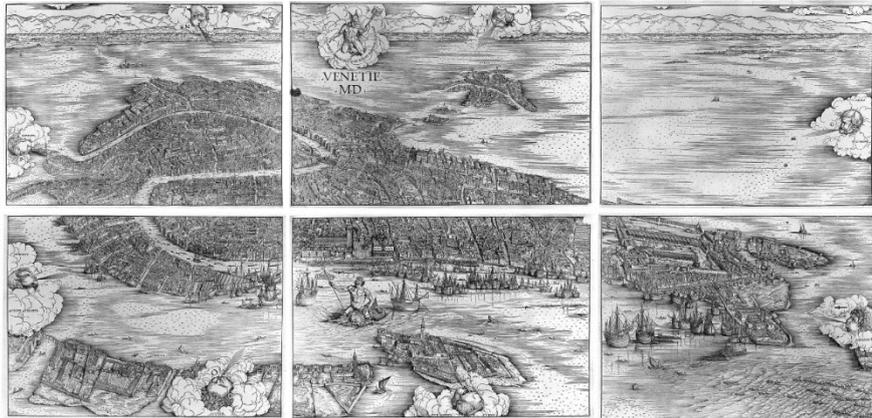


---

La chronologie des tentatives de mesure des dimensions terrestres est bien résumée dans [l'article de Smith relatif à l'Arc de Struve](#) – depuis Eratosthène (230 avant JC) jusqu'à Struve (1816-1855).

Comme nous l'a montré Philippe lors d'une précédente réunion des adhérents d'AstroSaône, Eratosthène avait déjà eu recours à une étoile – en l'occurrence le Soleil – pour mesurer une distance terrestre... Dès l'Antiquité donc, l'idée de 'prendre un recul astronomique' pour mesurer un objet aussi gros que la terre (alors que sa forme précise faisait encore débat), était déjà présente. Pour nous aujourd'hui – à l'âge des satellites et des drones - la démarche paraît évidente. Pourtant quand on y réfléchit, cette présience des perspectives 'à vol d'oiseau' me paraît tout à fait étonnante.

Je repense en particulier à cette vue ‘aérienne’ de Venise – exposée au Palais des Doges et datant de l’an 1500 :



Je laisserai de côté les autres tentatives très anciennes mentionnées dans l’article de Smith, pour en venir à celles – à partir de 1615 – basées sur le principe de la triangulation.

Le principe de la triangulation est connu de tous ceux qui se souviennent de leur cours de trigonométrie du lycée. Il est possible – connaissant la longueur d’un côté d’un triangle et la mesure de deux de ses angles, de calculer la longueur des deux autres côtés.

- de nombreuses références se font l’écho de ces relations trigonométriques – y compris la vidéo d’Arte précédemment citée
  - si les choses sont simples quand on considère les triangles dans un plan, la prise en compte de leur courbure (les triangles dont on parle peuvent avoir des côtés de 30 ou 40 km de long) est en principe nécessaire
  - la géométrie sphérique introduit des complications non négligeables ; là encore, les références ne manquent pas... [celle-ci en particulier](#)

Autant le calcul de la longueur des côtés des triangles est bien traité – en géométrie plane ou sphérique – autant j’ai eu de la difficulté à trouver une description précise des stratégies de projection des côtés des triangles sur un méridien terrestre :

- fallait-il matérialiser le méridien à chaque triangle mesuré ? si oui, comment ?
- le méridien devait-il nécessairement passer par le sommet (ou plusieurs sommets) d’un triangle (ou de triangles) ?
- projetait-on tous les côtés des triangles sur le méridien, ou simplement quelques-uns bien choisis ? si oui, comment les choisit-on ?
- la suite des triangles peut-elle s’écarter du méridien qu’elle prétend mesurer ? de combien ?

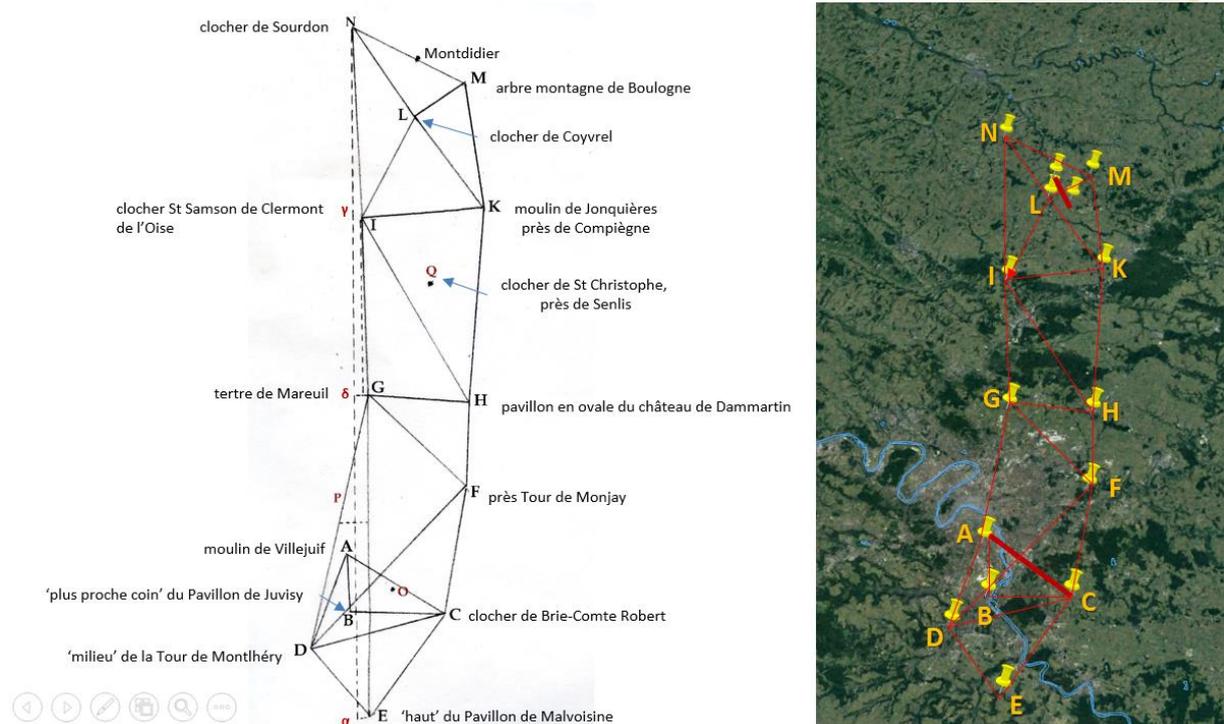
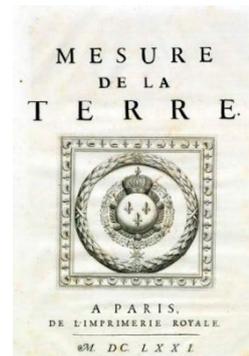
Je me suis dit qu’il était sans doute préférable d’approfondir une expérience ancienne, qui décrive cette stratégie, les mesures plus récentes pouvant se contenter de décrire une stratégie supposée connue – sans entrer dans les détails.

Finalement, c’est la campagne de mesures de l’Abbé Picard – relatée dans son [ouvrage La Mesure de la Terre de 1671](#) – qui m’a permis d’avancer. Je pense que je n’aurais pas été capable de déchiffrer complètement la description de Picard, sans le formidable [travail d’interprétation qu’en a fait Daniel Violland](#), qu’il prolonge et approfondit à la lumière des méthodes utilisées dans les siècles suivants.

## Mesure d'un arc de méridien par l'Abbé Picard (1668 – 1671)

L'abbé Picard – à la demande du roi Louis XIV – a réalisé la mesure d'un arc de méridien compris entre le point de Malvoisine (près de Montlhéry) et Sourdon (non loin d'Amiens).

Dans sa [Mesure de la Terre](#), Picard décrit sa démarche avec force détails :



Il détaille la chronologie des opérations de triangulation :

1. mesure de la base AC entre Villejuif et Brie-Comte-Robert
2. calcul – dans cet ordre - des côtés des triangles : ABC, ADC, DEC, DCF, DFG, GDE,FGH, GHI, HIK, IKL, KLM, LMN et ILN ; ainsi calculée de proche en proche à partir de la base AC, la valeur de LM est de 6036 toises 2 pieds (11,752km)
3. vérification de la mesure de LM :
  - la topographie ne permettant pas la mesure directe de LM, Picard a mesuré exactement la base XY (segment en gras ± 'perpendiculaire' à LM sur la carte Google Earth à droite)
  - après résolution des triangles XYL, XYM, la valeur trouvée pour LM est de 6037 toises (11,754km), soit environ **2 mètres d'écart sur LM – ce qui valide l'ensemble de la démarche**

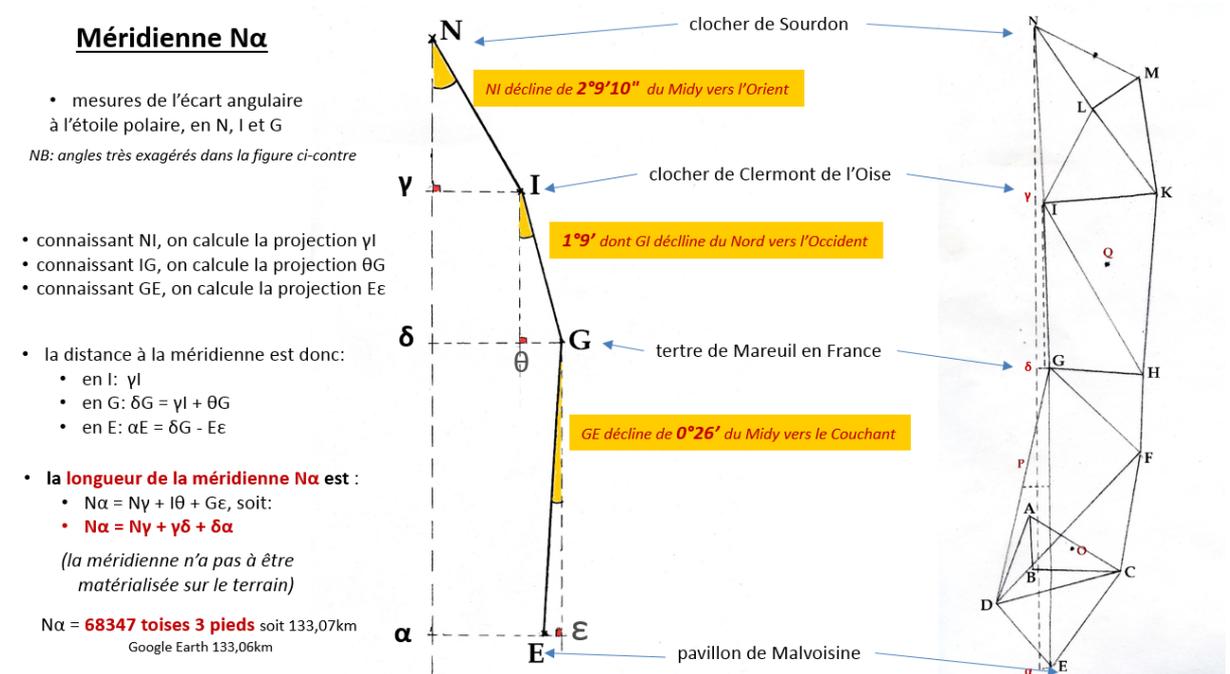
Picard s'attaque ensuite à la phase qui nous intéresse – celle de la projection des triangles sur la méridienne. C'est le travail décrit dans la Mesure de la Terre, à partir de l'Article VIII, p.15.

## Projection sur la méridienne des côtés de triangles choisis

On s'aperçoit dès les premières lignes de l'Article VIII, que Picard :

- a choisi de **projeter seulement trois côtés** qui définissent entièrement le méridien passant par N entre le point de mesure E (le plus au Sud) et le point de mesure N (le plus au Nord)
  - les trois côtés à projeter sont donc : NI, IG et GE
- le calcul des projections requiert de mesurer précisément 'l'azimut' - comme on dirait aujourd'hui - des segments à projeter NI, IG et GE
  - compte tenu des technologies disponibles à l'époque (voir annexe), Picard détermine en fait « la valeur dont décline [le côté mesuré] par rapport à la digression de l'étoile polaire »
  - il fallait donc, à l'aide d'un quart de cercle mesurer l'angle formé par un côté du triangle avec la direction de la Polaire

Compte tenu des mesures 'd'azimut' des segments en N ( $2^{\circ}9'10''$ ), en I ( $1^{\circ}9'$ ) et en G ( $-0^{\circ}26'$ ), il vient finalement :



La longueur de l'arc de méridien entre Sourdon et la projection du point E très proche ( $E\alpha = 819$  toises soit 1,595km) de Malvoisine est de 68430 toises 3 pieds soit 133,37km.

Picard a ensuite prolongé son arc jusqu'à Amiens et inclus des vérifications faisant intervenir les positions de Notre Dame, de l'Observatoire de Paris et de Montmartre.

On voit donc

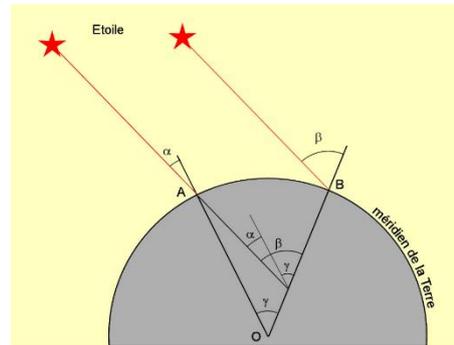
- qu'il n'est pas nécessaire de matérialiser la méridienne
- qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser tous les triangles

Mais Picard s'était manifestement arrangé (comment ? je ne sais pas...) pour que la ligne 'brisée' N,I,G,E soit très proche du méridien à mesurer...

## Détermination de l'angle sous-tendant l'arc mesuré

Ayant déterminé la longueur de l'arc méridien entre Sourdon et Malvoisine – disons A et B de la figure ci-contre, il fallait que Picard détermine par quel angle  $\gamma$  au centre de la Terre il était sous-tendu, pour en déduire la circonférence terrestre en faisant une règle de trois sur  $360^\circ$  ou la distance correspondant à  $1^\circ$  à la surface de la Terre.

Pour ce faire, Picard a utilisé l'étoile Ruchbah ( $\delta$  Cassiopée), et mesuré simultanément en A et en B les angles  $\alpha$  et  $\beta$  que fait l'étoile avec le zénith - au moment du passage de l'étoile au méridien. La différence  $\beta - \alpha$  est égale à  $\gamma$  – l'angle au centre recherché.



Picard a ainsi estimé la différence de latitude entre Sourdon et Malvoisine à  $1^\circ 11' 57''$ .

Il s'ensuit que  $1^\circ$  de méridien terrestre vaut : 57064 toises soit 111.22 km.

Et la circonférence terrestre 360 fois plus soit : 40039 km.

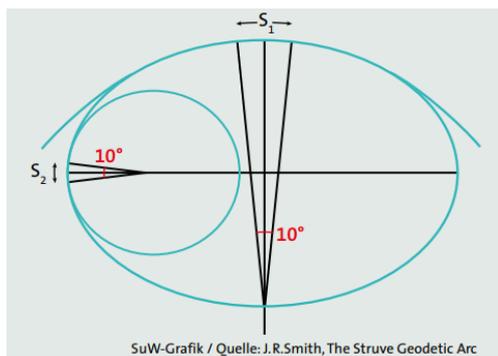
## La Terre est-elle aplatie aux pôles ou à l'équateur ?

Bien après Picard, la question qui agite les scientifiques est de savoir si la Terre est aplatie aux pôles – comme le prétend Newton sur la base de la gravitation (période d'oscillation du pendule) – ou à l'équateur – comme le prétend Cassini – le directeur de l'Observatoire de Paris.

Louis XV et l'Académie des Sciences suscitent en 1736 une expédition en Laponie – menée par Maupertuis, et une en 1737 à l'Equateur – menée par La Condamine.

Il s'agissait de mesurer la longueur d'un degré d'arc à ces deux latitudes extrêmes.

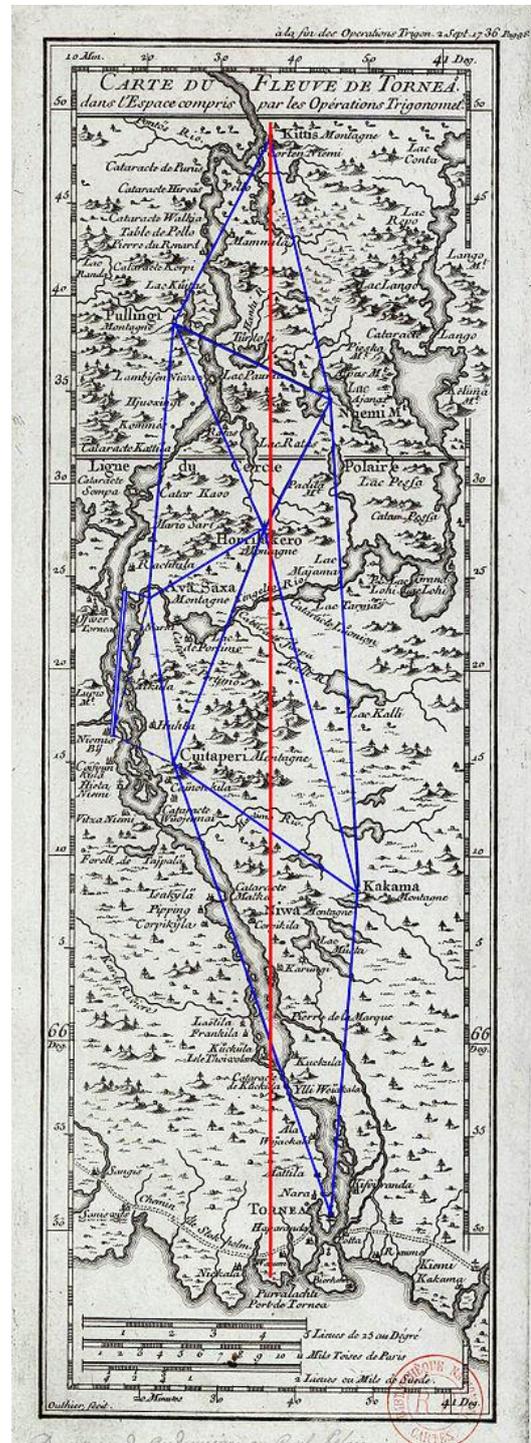
- si le degré est plus long à l'Equateur, la Terre est aplatie à l'Equateur
- au contraire, si le degré est plus long au pôle, la terre est aplatie au pôle



[vidéo Arte sur Maupertuis](#)

La comparaison des résultats de Maupertuis avec ceux de Picard, prouve que **la terre est aplatie au pôle**. Les mesures – également réalisées par Maupertuis - de la période du pendule avaient d'ailleurs corroboré cette conclusion. Newton avait donc raison contre Cassini !

Les résultats de l'expédition à l'Equateur – connus en 1739 seulement, allaient aussi dans le même sens...



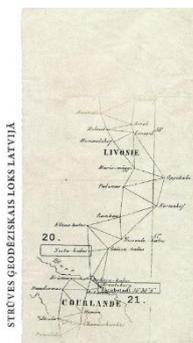
## Revenons à nos moutons estoniens : l'arc géodésique de Struve !

Nous sommes en 1815. Deux siècles se sont écoulés depuis l'Abbé Picard... Les instruments d'astronomie ont évolué.

Les mesures de longitude ont fait des progrès – en raison de l'amélioration des horloges.

C'est alors que **Friedrich Georg Wilhelm Struve** (ou F.G.W. Struve, ou Василий Яковлевич Струве pour les russes) – deuxième Struve d'une dynastie de cinq astronomes – d'origine allemande (né à Altona près de Hambourg) alors professeur de l'Université de Dorpat – (aujourd'hui Tartu, en Estonie) reçut la mission de cartographier la Livonie (entité regroupant alors – approximativement – la Lettonie et l'Estonie d'aujourd'hui) :

- F.G.W. Struve commença vers 1816 et édita la carte de Livonie en 1839
  - il prit une base de départ mesurée à la surface d'un lac gelé, en l'occurrence le lac Vorstjärv 20km à l'Est de Viljandi ; il a également utilisé à des fins de vérification la surface de la Daugava gelée non loin de Riga
  - le méridien qu'il s'agissait de mesurer était bien sûr celui de l'observatoire de Tartu
  - selon la topographie du terrain, Struve a utilisé des bâtiments (clochers, moulins à vent, etc...) ou des signaux – sorte de tours en bois fabriquées pour l'occasion ; on a reproché à Struve de ne pas avoir songé à matérialiser l'emplacement de ces signaux par des marques enterrées, de manière à pouvoir rééditer dans le futur les campagnes de mesure



- au cours de cette période, il entra en contact avec un général russe d'origine allemande Carl Tenner – à qui on avait confié une tâche sensiblement identique en Lituanie
- une rencontre eut lieu en 1828 à Tartu, où ils jetèrent les bases de la consolidation de leurs travaux respectifs
  - il leur fallut en particulier établir la conversion des mesures de longueur utilisées – Struve utilisant – comme Picard – la toise de Paris (1,949m) et Tenner le sajen russe (2,134m)
  - ils eurent aussi l'idée d'étendre l'arc vers le Nord ; depuis l'expédition de Maupertuis et



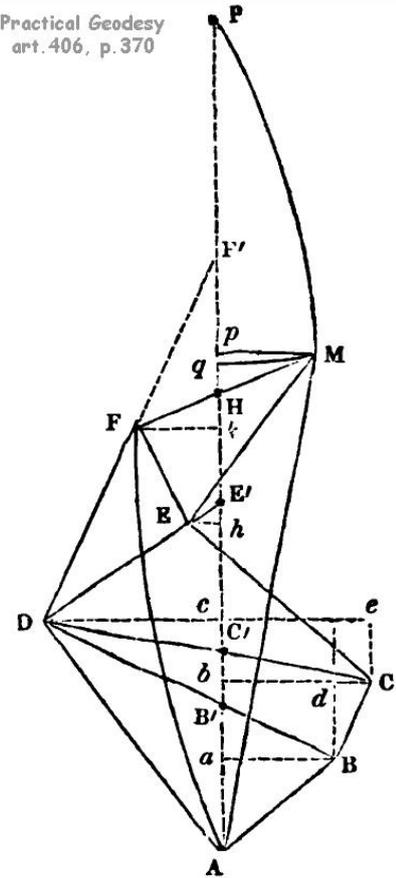
Celsius en Laponie de 1735 à 1737, une autre expédition – suédoise cette fois – menée par Svanberg avait eu lieu de 1801 à 1803, avec des résultats un peu différents ; tout en reprenant un trajet initialement analogue à celui de Maupertuis à partir de Tornéa - ils firent leurs propres mesures et prolongèrent le tracé jusqu'à Fuglenes / Hammerfest sur la côte de l'océan arctique

- dans l'extrême Nord la progression de l'expédition – menée par le norvégien Christopher Hansteen a été très lente – en raison du climat et de la nature du terrain, parfois très marécageux
  - en parallèle, ils lancèrent **une campagne vers le Sud** en direction de l'Ukraine et de la Bessarabie, pour aboutir à l'arc de Struve-Tenner de 25°, tel que nous le connaissons aujourd'hui et qu'il vient d'être inscrit au patrimoine de l'UNESCO en 2005
- les travaux de Struve concernant l'arc géodésique (car il avait de nombreuses autres occupations) s'échelonnèrent de 1815 à 1851
  - la publication en français de ses travaux dans les Mémoires de l'Académie des Sciences n'est malheureusement plus accessible – du moins gratuitement
  - les Russes en ont édité des morceaux choisis de 'l'Arc méridien' en 1957, mais la forme numérisée ne comporte pas les croquis – ce qui empêche une compréhension fine de ses calculs

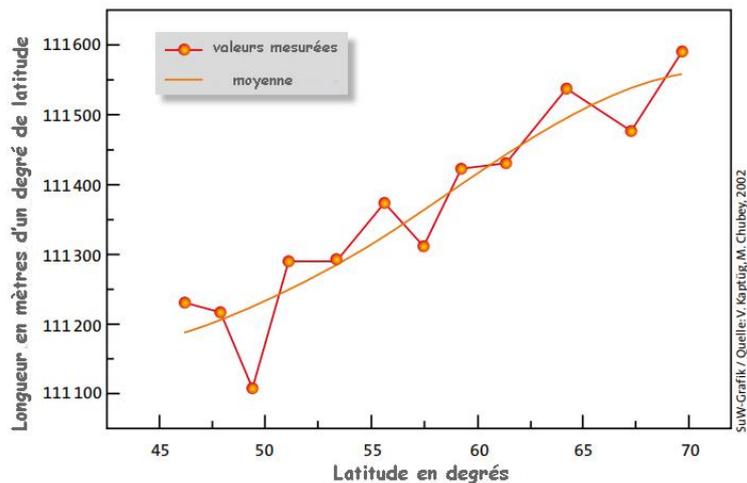


- je n'ai donc pas pu me plonger dans le détail dans les calculs de Struve
  - toutefois le [traité de Géodésie pratique édité à Londres par John Nerrien en 1845](#), fait le point sur les techniques de calcul de l'époque
  - en particulier, il présente la prise en compte de la géométrie sphérique dans les calculs de triangulation
  - j'ai pu d'autre part, suivre la méthode de projection des longueurs des côtés de triangles sur la direction de la méridienne :
    - il en ressort (chap.XVIII ; art 406 ; p.372) qu'on utilise dans les grandes lignes, la méthode de projection des perpendiculaires utilisée par Picard
    - seule la précision a changé considérablement – à la fois dans la mesure des longueurs et la mesure des angles

Practical Geodesy  
art. 406, p. 370



- **les résultats**, très précis, ont permis de quantifier l'aplatissement du géoïde, en établissant la longueur d'un degré d'arc méridien, en fonction de la latitude :



Question (pour moi...) non résolue :

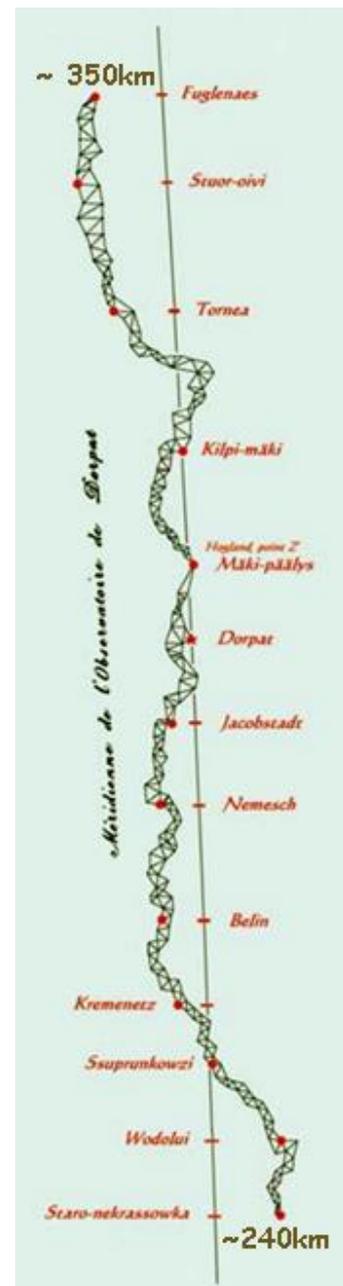
## L'écart entre la suite des triangles et le méridien !

Après cette longue bibliographie – qui m'a certes beaucoup appris !! – je suis bien incapable de répondre à la question que je me posais initialement sur la **distance parfois importante entre la suite des triangles et le méridien de Tartu qu'il s'agissait de mesurer.**

Minimiser la distance entre les triangles et le méridien était sans doute de la plus haute importance pour l'Abbé Picard – qui ne tenait pas compte de la courbure de la terre et n'avait pas d'instruments très précis.

On peut se demander pourquoi Struve et ses collègues se sont affranchis manifestement d'une telle stratégie !?

- certes c'est au niveau de la Livonie (Lettonie + Estonie) que la coïncidence est la meilleure avec le méridien de Tartu – puisque c'était bien là le premier but de Struve
- en Lituanie, la suite des triangles s'écarte vers l'Ouest, sans doute pour 'rejoindre' la succession des triangles déjà posés par Tenner
- en Ukraine, les triangles repassent à l'Est du méridien et s'en écartent même notablement, puisque le sommet le plus au Sud est à environ **240 km à l'Est** du méridien de Tartu ; il faut dire qu'on est là proche du delta du Danube et que le terrain n'est sans doute pas propice au choix de l'emplacement des signaux géodésiques...
- dans le Nord de la Norvège, la nécessité de s'écarter du méridien peut se comprendre encore plus facilement – compte-tenu du caractère marécageux du terrain ; le point le plus septentrional – la fortification de Fulgenes à Hammersfest se trouve à plus de **300km à l'Ouest** du méridien de Tartu



Si la projection des longueurs des côtés sur le méridien est précise, on peut tout de même se demander si – en acceptant des déviations de longitude de quelques centaines de kilomètres (2 ou 3°) – on ne perd pas en précision pour l'évaluation de la forme du géoïde ?

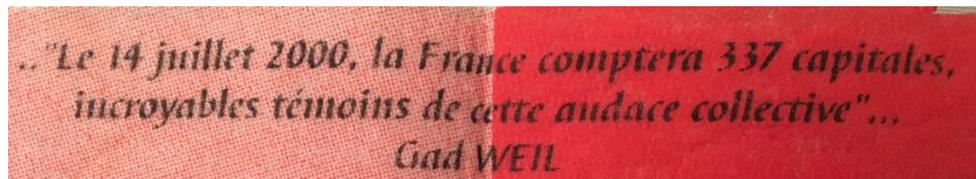
... en guise de conclusion :

## Le pique-nique du 14 juillet 2000 sur le méridien de Paris : quel rapport avec l'arc de Struve ?

J'avais beaucoup apprécié - en l'an 2000 - la proposition de rassembler un maximum de Français pour un incroyable **pique-nique géant ... sur le méridien de Paris !**

***A la géodésie, on attachait pour l'occasion une dimension de lien social et de partage !***

- j'avais toutefois regretté que l'organisation de cet événement - confiée à une société privée - ait finalement été assez mal relayée par les canaux 'officiels', et la mobilisation n'a pas été à la hauteur de mes espérances.
- j'avais choisi de vivre l'événement à **Saint Amand-près-Crocq (45°48' N ; 2° 21'E soit 0°méridien Paris)** dans la Creuse.
  - hélas, le temps a été catastrophique et l'ambiance quelque peu plombée...
  - mais l'idée de cette **chaîne humaine** est restée forte
    - j'ai conservé un échantillon de « l'incroyable nappe » couvrant cette incroyable table théorique - qu'on aurait pu croire dressée par Delambre et Méchain ! - s'étendant de Dunkerque aux Pyrénées



*.. "Le 14 juillet 2000, la France comptera 337 capitales, incroyables témoins de cette audace collective"...*  
*Gad WEIL*

## ...la géodésie comme vecteur de l'audace collective et de l'esprit de résistance !...

J'ai eu honte a posteriori d'avoir alors 'oublié' une autre **chaîne humaine**, celle qui - onze ans plus tôt le 23 août 1989 - suivant précisément l'arc de Struve sur 687km, avait réuni deux millions de Baltes (soit 1/3 de la population) de Tallinn à Vilnius en résistance à un pouvoir soviétique sur le déclin...



## **Bibliographie**

### **STRUVE et ARC de STRUVE**

Струве, Василий Яковлевич. [Дуга меридиана : \(Избранные главы\)](#)

[Arc de Struve . Wikipedia](#)

Smith. [struve geodetic arc](#) : détails de la constitution de cet arc

Lemke. [Die Vermessung der Welt](#) . présentation des points géodésiques le long de l'arc

Debarbat p25-30 [arc géodésique le plus long d'Europe,](#)

Viik (2011)Viik. 2011. Collaboration Struve - Tenner

[Partie biélorusse de l'arc de Struve](#)

### **ABBE PICARD**

Mesure de la Terre par Abbé Picard :

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b7300361b.image>

avec projections sur le méridien: <http://prof.pantaloni.free.fr/IMG/pdf/MPS-2-Triangulation.pdf>

présentation très complète sur Picard (par Daniel Violland, qui explique parfaitement les projections):

<https://www.calameo.com/books/00514149014a5aaae83cb>

généralités sur triangulation en coordonnées sphériques; exemple des mesures de Picard

<http://revue.sesamath.net/spip.php?article765#ANX3>

### **METHODES DE TRIANGULATION**

Vidéo Arte-Karambolage : [triangulation et constitution cartes IGN](#)

Principe de la triangulation (Wikipédia)

[https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9ridienne\\_\(g%C3%A9od%C3%A9sie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9ridienne_(g%C3%A9od%C3%A9sie))

Trigonométrie sphérique et réduction sur le méridien p.369

[John Narrien, Geodesy, 1845](#)

Triangulation avec méridienne comme somme de côtés de triangle (sans projection)

Delambre-Méchain

<http://thomas-corneille-lyc.spip.ac-rouen.fr/IMG/pdf/triangulation.pdf>

Éléments mathématiques et exercices

<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/SurGeometrie/meridienne.pdf>

Equations générales pour polygones :

<https://www.youtube.com/watch?v=fOwLeKfB1zM>

### **AUTRES ARCS**

[Les plus grands ArcsGéodésiques Lequeux.pdf](#)

Magazine : l' Astronomie (octobre 2018) : article sur la méridienne de St Sulpice, conçue et réalisée par Pierre-**Charles Le Monnier**

arc de Maupertuis expédition en Laponie (Maupertuis, Clairaut, Celsius)  
[biographie de Maupertuis](#)

### **AUTRES OUVRAGES**

cartes de Cassini et arcs de Cassini

[Denis Guedj](#), *Le mètre du monde*, Éditions du Seuil, 2000 ; histoire de la méridienne de Paris. Delambre et Méchain

Daniel Kehlmann. *Die Vermesser der Welt* ; Hamburg 2006 ; histoire d'Alexander von Humbolt et Aimé Bonpland